2. 組み合わせ応力

２．１　平面応力状態と斜面上の応力

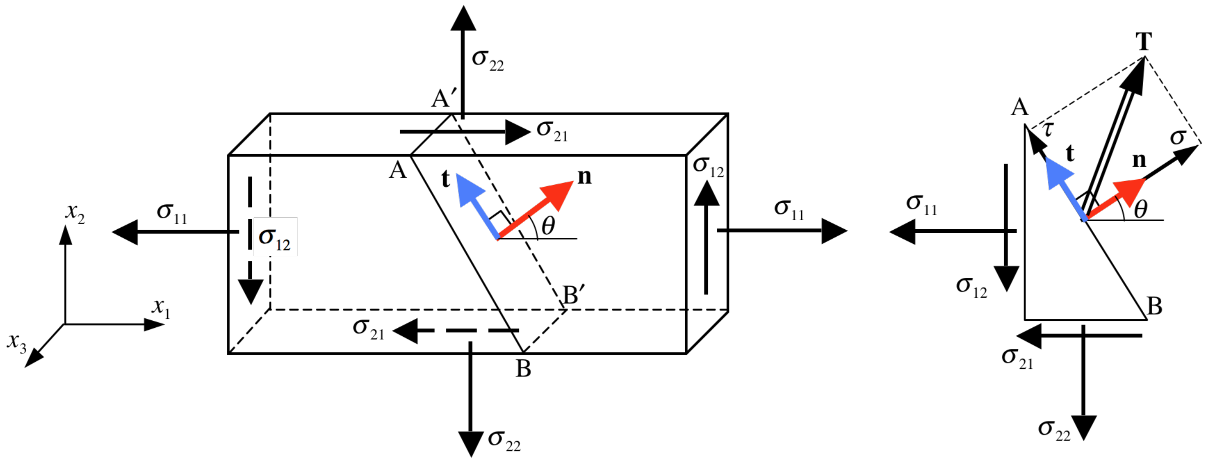

図 2.1.1　平面応力状態と斜面上の応力

図 2.1.1(a)に示すようなx_3に関係する応力が存在しない（とみなせる）状態を，平面応力状態 (plane stress condition)という．ここで，図 2.1.1(b)に描かれている斜面 ABB′A′ 上の垂直応力$\boldsymbol{\sigma}$とせん断応力$\boldsymbol{\tau}$を求めてみよう．まず，斜面に作用する応力ベクトルの成分T_iは，$\mathbf{n}=(\cos\theta, \sin\theta)$であることを考慮して，１．１節で学習した Cauchy の式(1.1.1)より次のように求めることができる．

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}\cos\theta + \sigma_{12}\sin\theta \\ \sigma_{12}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta \end{Bmatrix} \tag{2.1.1}$$

$\mathbf{T}$ の $\mathbf{n}$ 方向成分，すなわち，$\boldsymbol{\sigma}$ は次のように求めることができる．

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{n} = T_i n_i = T_1 n_1 + T_2 n_2 + T_3 n_3 = \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \\ &= \sigma_{11}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \sigma_{22}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + \sigma_{12}\sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

同様に，$\mathbf{T}$ の $\mathbf{t}$ （$=(-\sin\theta,\ \cos\theta)$）方向成分，すなわち，$\tau$ の計算は次の通りである．

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{t} = T_i t_i = T_1 t_1 + T_2 t_2 + T_3 t_3 \\ &= -\sigma_{11}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= -\frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

２．２　主応力とその方向

主応力

式(2.1.2)で求められた垂直応力σは，斜面の角度θによって変化する．そこで，σの極値を求めてみよう．

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}=-(\sigma_{11}-\sigma_{22})\sin 2\theta+2\sigma_{12}\cos 2\theta=0 \tag{2.2.1}$$

式(2.2.1)を満足するθを，θ_{n}とおくと，

$$\tan 2\theta_{\mathrm{n}}=\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}} \tag{2.2.2}$$

式(2.2.2)と$\sin^2 2\theta_{\mathrm{n}}+\cos^2 2\theta_{\mathrm{n}}=1$を連立させて，$\cos 2\theta_{\mathrm{n}}$と$\sin 2\theta_{\mathrm{n}}$を求めると次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\cos 2\theta_{\mathrm{n}}&=\pm\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4{\sigma_{12}}^2}}\\ \sin 2\theta_{\mathrm{n}}&=\pm\frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4{\sigma_{12}}^2}}\end{aligned}\right\} \tag{2.2.3}$$

問 2.1.1：式(2.2.3)を確かめよ．

式(2.2.3)を式(2.1.2)の最後の表現に代入すると，垂直応力σの極値が次のように求められる．

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22})+\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4{\sigma_{12}}^2}\\ \sigma_2&=\frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22})-\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4{\sigma_{12}}^2}\end{aligned}\right\} \tag{2.2.4}$$

問 2.1.2：式(2.2.4)を確かめよ．

σ_1とσ_2をそれぞれ，最大主応力，最小主応力と呼び，両者を合わせて単に主応力(principal stress) という. 主応力の作用する面（つまり, 法線ベクトル$\mathbf{n}_{\mathrm{n}}=(\cos\theta_{\mathrm{n}},\sin\theta_{\mathrm{n}})$を持つ面）を主応力面といい，主応力の作用方向を主応力面あるいは主軸 (principal axis) という．$\theta_{\mathrm{n}}+\pi/2$もまた，式(2.2.2)を満たす（$\tan x$は$\pi$の周期関数）ので，主応力面は直交する２面があり，ひとつにσ_1，他方にσ_2が生じる．

次に式(2.1.3)のせん断応力τに着目して，

$$\tau = -\frac{1}{2}\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta = 0 \tag{2.2.5}$$

とおいてみると，式(2.2.2)が出る．つまり，法線ベクトルが $\mathbf{n}_{\mathrm{n}}$ の主応力面では，せん断応力 τ が零になることがわかる．

式(2.2.4)において，主応力 σ_1 と σ_2 を加えると次式を得る．

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{11} + \sigma_{22} \tag{2.2.6}$$

σ_{11} と σ_{22} のそれぞれの値は，座標軸の取り方に依存してその値が変化するが，主応力 σ_1，σ_2 は与えられた応力状態によって決まり参照する座標系に依存しない．すなわち，垂直応力の和 $\sigma_{11} + \sigma_{22}$ は参照する座標系に関係なく一つの値に定まる．このような量を不変量 (invariant) という（より専門的には第 1 不変量という．なお，第 2 不変量は塑性力学を学習する上で重要な量になることを予告しておこう）．

主せん断応力

今度は，式(2.1.3)で与えられる斜面上のせん断応力 τ の極値を求めてみよう．

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta} = -(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos 2\theta + 2\sigma_{12}\sin 2\theta = 0 \tag{2.2.7}$$

式(2.2.7)を満足する θ を θ_{t} とすると，

$$\tan 2\theta_{\mathrm{t}} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} \tag{2.2.8}$$

式(2.2.8)と $\sin^2 2\theta_{\mathrm{t}} + \cos^2 2\theta_{\mathrm{t}} = 1$ を連立させて，$\cos 2\theta_{\mathrm{t}}$ と $\sin 2\theta_{\mathrm{t}}$ を求めると次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\theta_{\mathrm{t}} &= \pm\frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}{}^2}} \\ \sin 2\theta_{\mathrm{t}} &= \mp\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}{}^2}} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.9}$$

問 2.1.3：式(2.2.9)を確かめよ．

式(2.2.9)を式(2.1.3)の最後の表現に代入すると，

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}{}^2} \\ \tau_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}{}^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.10}$$

問 2.1.4：式(2.2.10)を確かめよ．

τ_1, τ_2 を，それぞれ，最大，最小主せん断応力という．また，式(2.2.4)の第１式から第２式を差し引いて，式(2.2.10)と比較すると次式を得る．

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \tau_2 &= -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned}\right\} \tag{2.2.11}$$

つまり，２つの主応力の差の半分が主せん断応力の値である．

式(2.2.9)を式(2.1.2)に代入して，主せん断応力面に作用する垂直応力を求めてみると，

$$\sigma_\mathrm{t} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{2.2.12}$$

であり，主せん断応力面の垂直応力はゼロではない．

問 2.1.5　図 2.1.1 において，$\sigma_{11} = 50$ MPa, $\sigma_{22} = -30$ MPa, $\sigma_{12} = 20$ MPa であるとき，以下の問いに答えよ．

（１）主応力と主応力面の方向を求めよ．

（２）主せん断応力と主せん断応力面の方向を求めよ．

問 2.1.6　図 2.1.1 において，$\sigma_{11} = 60$ MPa, $\sigma_{22} = 20$ MPa, $\sigma_{12} = 15$ MPa であるとき，以下の問いに答えよ．

（１）主応力と主応力面の方向を求めよ．

（２）主せん断応力と主せん断応力面の方向を求めよ．

（３）$\theta = 30^\circ$ のときの垂直応力 σ とせん断応力 τ を求めよ．