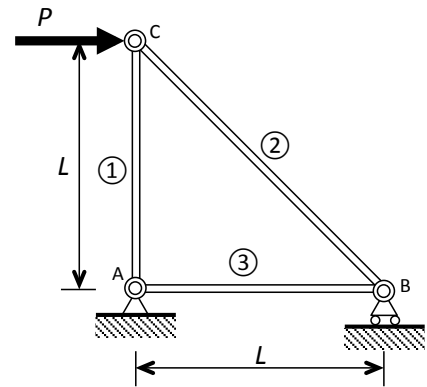


〔1〕物体の全補ひずみエネルギーを U^* とし、コンプリメンタリー外力ポテンシャル関数を $V_E^* = -\int_S T_i u_i dS$ と表すものとする。ここに、 T_i は単位面積当たりの表面力（外力）、 u_i は変位、 S は物体表面である。以下の問いに答えよ。

- (1) ひずみエネルギーと補ひずみエネルギーとは何か、説明せよ。【5 点】
- (2) 構造物が集中荷重 Q_i ($i=1, 2, \dots, n$) (n は集中荷重の個数) を受けるとする。ここで、 q_i を、 Q_i の作用点における Q_i の作用方向の変位とすると、 V_E^* を Q_i と q_i を用いて表せ。【5 点】
- (3) 最小コンプリメンタリーエネルギーの原理を出発点として、カスティリアノの第 2 定理を誘導する過程を示せ。ただし、線形弾性体を対象とし、補ひずみエネルギー U^* とひずみエネルギー U は値が等しく、これらは集中荷重 Q_i の関数として表現できているものとする。【10 点】

〔2〕右の図に示すような 3 本の部材①②③から構成されるトラス構造に横向き荷重 P が作用している。全ての部材共にヤング率は E 、断面積は A である。



- (1) 部材①②③に作用する内力（軸力）を求めよ。

【15 点】

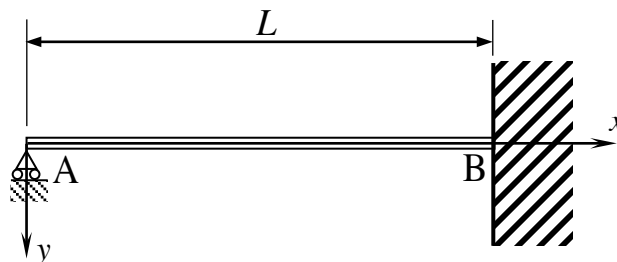
- (2) 節点 C の水平変位を求めよ。【10 点】

〔3〕下の図に示すような不静定はり（支間長 L ；曲げ剛性 EI [一定]）において、支点 A が鉛直下向きに Δ だけ沈下した。

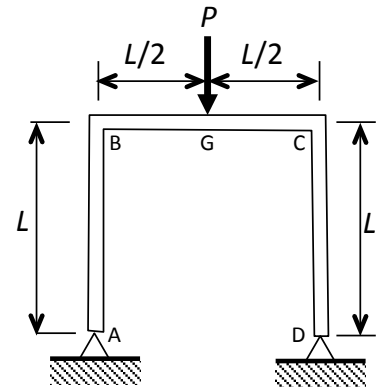
- (1) はりが支点から受ける反力を図示し、エネルギー法を活用してそれらの値を求めよ。

【15 点】

- (2) 曲げモーメント図 (BMD) とせん断力図 (SFD) を描け。【10 点】

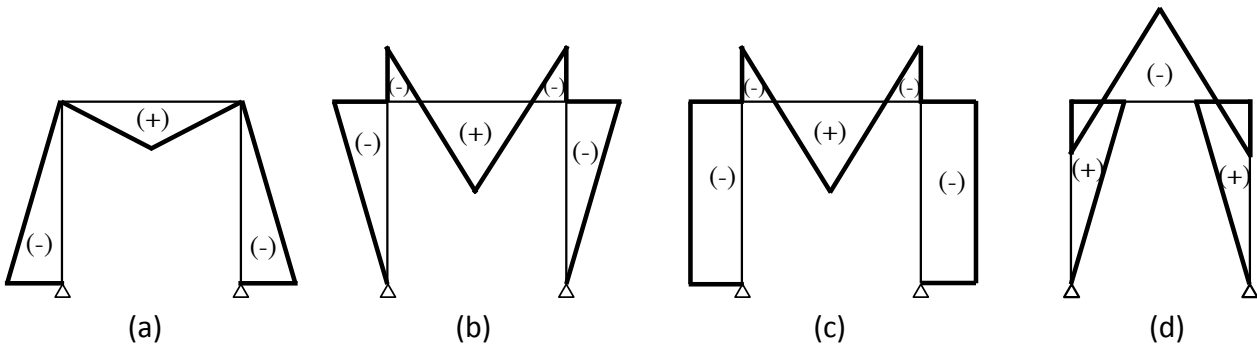


〔4〕右図に示す集中荷重 P を受ける門型の不静定構造（門型ラーメン構造と呼ばれる）について以下の問いに答えよ．断面の曲げ剛性は全ての区間で EI とする．



(1) 構造が支点から受ける反力を全て図示し，それら値を求めよ．
【10点】

(2) 門型構造の内側が引張りとなる曲げ状態に対する曲げモーメントを正と定義する．部材に沿って曲げモーメント図 (BMD) を描いたとき，下図(a)～(d)のうち BMD の外形線として正しいものはどれか．また，その根拠を述べよ．【下記 (3)を含めて 10点】



(3) 点 G の曲げモーメントの値を求めよ．

〔5〕2次元応力状態の微小要素 (x_1 - x_2 平面内にある) に下記のような応力が作用している．

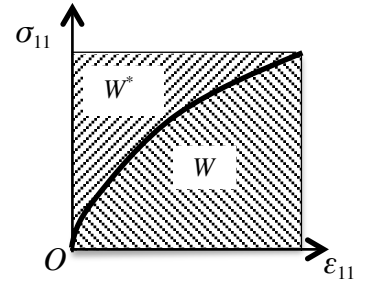
$$\sigma_{11} = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_{22} = -50 \text{ MPa}, \quad \sigma_{12} = 30 \text{ MPa}$$

最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_2 ならびにそれらが発生する方向 (x_1 軸からの角度 θ_1, θ_2) を求めよ．ただし， x_1 軸から角度 θ をなす面における垂直応力 σ は以下の式で求められる．【10点】

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta$$

[1]

(1) ひずみエネルギー U とは、応力テンソル σ_{ij} 、ひずみテンソル ε_{ij} 、物体の体積 V により、 $U = \int_V \left(\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right) dV$ で定義される量、補ひずみエネルギー U^* とは、 $U^* = \int_V \left(\int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \right) dV$ で定義される量。1次元問題における単位体積当たりのひずみエネルギー W は右図の応力-ひずみ線図における下側の斜線領域の面積に相当する。また、単位体積当たりの補ひずみエネルギー W^* は右図の応力-ひずみ線図における上側の斜線領域の面積に相当する。(本試験に対する解答としては、この最後の図解が示せば十分である)。



$$(2) \quad V_E = -\int_S T_i u_i dS = -\sum_{I=1}^n Q_I q_I$$

(3)

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(U^* + V_E) = \delta(U + V_E) = \delta \left(U(Q_I) - \sum_{I=1}^n Q_I q_I \right) \\ &= \sum_{I=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial Q_I} \delta Q_I - q_I \delta Q_I \right) = \sum_{I=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial Q_I} - q_I \right) \delta Q_I \\ &\quad \therefore \frac{\partial U}{\partial Q_I} = q_I \end{aligned}$$

[2]

(1) 全体構造に対する力とモーメントの釣り合いより、反力は、

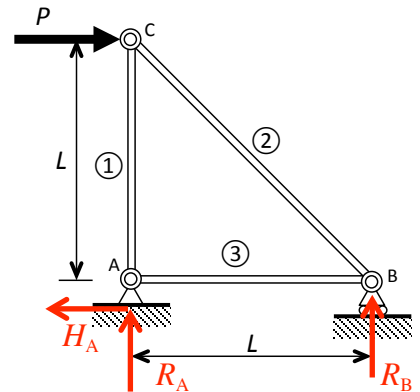
$$R_A = -P, R_B = P, H_A = P.$$

各節点における力の釣り合いより、部材力はそれぞれ

$$\textcircled{1} P \quad \textcircled{2} -\sqrt{2}P \quad \textcircled{3} P.$$

(2) ひずみエネルギーは、次式で求められる。

$$U = \sum_{I=1}^N \frac{Q_I^2 L_I}{2A_I E_I}$$



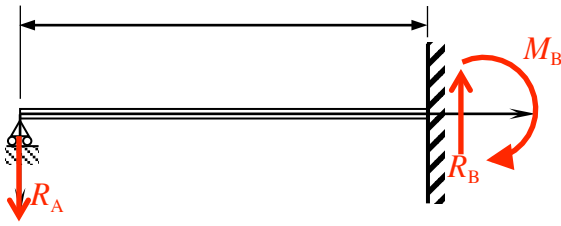
	Q_I	Q_I^2	L_I	$Q_I^2 L_I$
①	P	P^2	L	$P^2 L$
②	$-\sqrt{2}P$	$2P^2$	$\sqrt{2}L$	$2\sqrt{2}P^2 L$
③	P	P^2	L	$P^2 L$

$$U = \frac{(1 + \sqrt{2})P^2 L}{AE}$$

$$\therefore \Delta_{CH} = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2(1 + \sqrt{2})PL}{AE}$$

[3]

(1) 支点 A の反力 R_A は沈下量の向きに合わせて下向きを正と定義しておく。(逆向きでも良いが、その場合は値の符号が反転することに注意)。



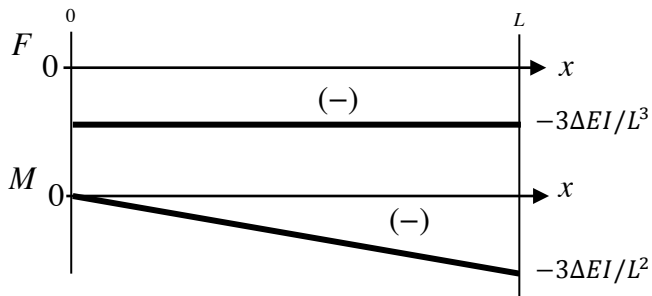
支点 A を原点に右向きに座標 x を取ると、曲げモーメントは、 $M = -R_A x$ 。

ひずみエネルギーは、
$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{(-R_A x)^2}{2EI} dx$$

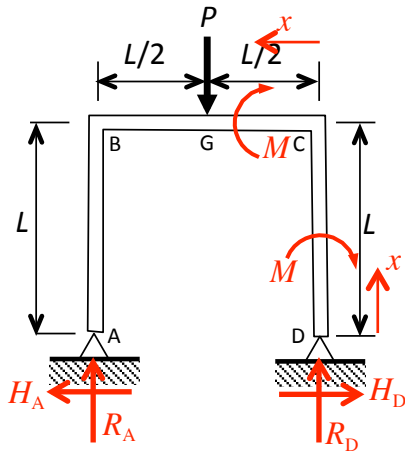
$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_A} dx = \int_0^L \frac{(-R_A x)(-x)}{EI} dx = \frac{R_A}{EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{R_A L^3}{3EI}$$

$$\therefore R_A = \frac{3\Delta EI}{L^3}, \quad R_B = \frac{3\Delta EI}{L^3}, \quad M_B = \frac{3\Delta EI}{L^2}$$

(2) $M = -\frac{3\Delta EI}{L^3} x, \quad F = -\frac{3\Delta EI}{L^3}$



[4]



$$\left. \begin{aligned} \sum V &= -P + R_A + R_D = 0 \\ \sum H &= H_A - H_D = 0 \\ \sum_{(A)} M &= LR_D - \frac{L}{2}P = 0 \end{aligned} \right\}, \quad R_A = R_D = \frac{P}{2}, \quad H_A = H_D \text{ (未知反力)}$$

DC 間 : $M = H_D x$

CB_(~1/2)間 : $M = R_D x + H_D L = \frac{P}{2}x + H_D L$

$$U = 2 \int_0^L \frac{(H_D x)^2}{2EI} dx + 2 \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x + H_D L\right)^2}{2EI} dx$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial H_D} = \int_{\text{whole length}} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H_D} dx = 2 \int_0^L \frac{(H_D x) x}{EI} dx + 2 \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x + H_D L\right) L}{EI} dx$$

$$\left[\frac{H_D x^3}{3} \right]_0^L + L \left[\frac{Px^2}{4} + H_D Lx \right]_0^{L/2} = \frac{H_D L^3}{3} + \frac{PL^3}{16} + \frac{H_D L^3}{2} = 0$$

$$\therefore H_D = -\frac{3}{40}P, \quad H_A = -\frac{3}{40}P$$

(2) 曲げモーメント図 (BMD) として正しいのは(b)である。支点 A, D は回転自由なので $M=0$. $H_D < 0$ より, DC 間は外側が引張られるので $M < 0$. これらを満たすのは(b)である.

(3)

$$M_G = \frac{PL}{2} + \left(-\frac{3}{40}P\right)L = \frac{7}{40}PL$$

[5]

$$\sigma_{11} = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_{22} = -50 \text{ MPa}, \quad \sigma_{12} = 30 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = \frac{1}{2}(100 - 50) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(100 + 50)^2 + 4 \cdot 30^2} = \left\{ \begin{array}{l} 105.77 \\ -55.77 \end{array} \right. \text{ [MPa]}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{2 \cdot 30}{100 + 50} = 0.4 \quad \rightarrow \quad \theta = 10.9^\circ, 100.9^\circ$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} = -\{2(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos 2\theta + 4\sigma_{12}\sin 2\theta\} = -\{2(100 + 50)\cos(2 \times 10.9^\circ) + 4 \cdot 30\sin(2 \times 10.9^\circ)\} < 0$$

$$\text{よつて, } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 105.8 \text{ MPa}, \quad \theta_1 = 10.9^\circ \\ \sigma_2 = -55.8 \text{ MPa}, \quad \theta_2 = 100.9^\circ \end{array} \right.$$