材料力学 II 中間試験　2017.5.29 実施

〔１〕応力に関する釣合いの式，仮想仕事の原理，ならびに補仮想仕事の原理について以下の問いに答えよ．（考え方，誘導過程，及び結果の式が採点対象となる．）

（１） T_i を単位面積当たりの表面力，f_i を単位体積当たりの物体力，S を物体表面，V を物体体積とする．物体が静止状態にあるためには表面力の全表面に対する積分値と，物体力の全体積に対する積分値とを加えた結果は零でなければならない．これより物体内の全ての物質点で満たされるべき応力に関する釣合いの式を誘導せよ．ただし，応力テンソルは σ_{ij}，表面面素に立てた単位法線ベクトルは n_j で表すものとする．[10 点]

（２） 物体が荷重を受けて釣合っている状態にあるとする．その状態から，さらに任意の仮想変位 δu_i が生じたとする．自重（物体力）の影響は無視して，表面力 T_i（単位面積当たり）と δu_i とがなす仕事は $\delta W_{\mathrm{E}} = \int_S T_i \delta u_i \, \mathrm{d}S$ と書ける．この式を出発点とし，仮想仕事の原理式を誘導する過程を示せ．

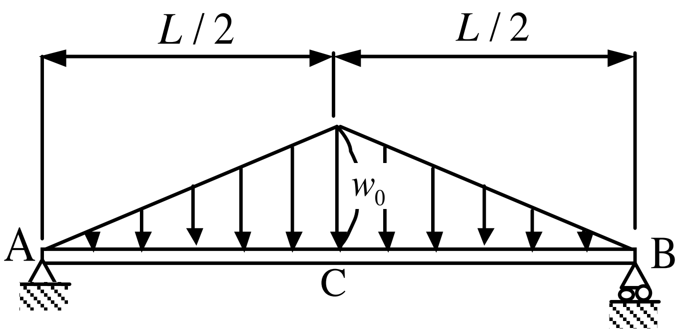
[10 点]

（３） 架空の表面力 δT_i，それによって生じる架空の応力 $\delta\sigma_{ij}$（釣合いの式は形式的に満たすものとする）を導入して，補仮想仕事の原理式を書け（この設問に限って，結果の式のみの解答で良い）．[10 点]

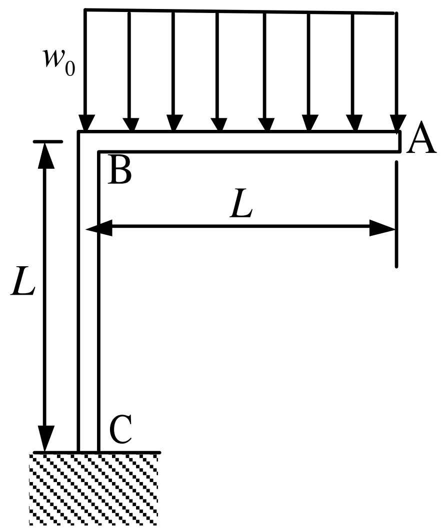
（４） はりの曲げ問題において任意の１点のたわみ（Δ）を求めるための「ダミー荷重法」として知られる式を，補仮想仕事の原理に基づいて誘導せよ．ただし，はりの長さ方向に座標 x_1 をとり，架空のダミー荷重によって生じる曲げモーメントを $m(x_1)$，実荷重によって生じる曲げモーメントを $M(x_1)$ とし，はりの全長は L であるとする．また，はりはヤング率 E の線形弾性体でできており，断面二次モーメントを I で表すものとする．[10 点]

〔２〕下記のはりの問題を，補仮想仕事の原理（ダミー荷重法）を用いて解け．解法の手順が分かるように解答せよ．ただし，はりの曲げ剛性 EI は一定とする．

（１）下図に示すはりの中央点 C のたわみを求めよ．（ヒント：点 C において構造が左右対称であるという条件を考慮すると簡単になる．）　[30 点]



（２）下図に示す逆 L 字型はりの先端 A の垂直方向たわみ（上下どちらを正に取ったか明示すること）．　[30 点]



材料力学II 中間試験　2017.5.29 実施の解答例

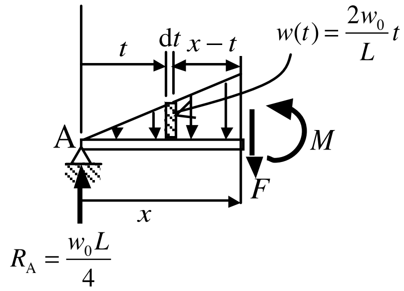
〔１〕　解答は授業資料の下記の箇所に詳述があるので，解答例の記述は省略する．

（１）　授業資料　p. 4 にあるとおり．

（２）　授業資料　p. 10 にあるとおり．

（３）　授業資料　p. 11 にあるとおり．

（４）　授業資料　p. 12 にあるとおり．



〔２〕

（１）実荷重による支点反力は，$R_A = R_B = w_0 L / 4$．

曲げモーメントは，点 A を原点として右向きに x を取ると，

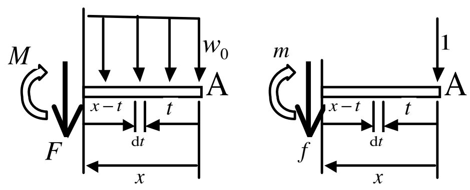
$$M = -\int_0^x \frac{2w_0}{L} t(x-t)\,\mathrm{d}t + \frac{w_0 L}{4}x = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0 L}{4}x \quad (\text{for } 0 \le x \le L/2).$$

中央点 C に下向きにダミー単位荷重を作用させた場合の支点反力は，$r_A = r_B = 1/2$ であり，対応する曲げモーメントは $m = \frac{1}{2}x$ (for $0 \le x \le L/2$) である．

よって，中央点のたわみ Δ_C は，問題の中央点 C に関する対称性を考慮して，

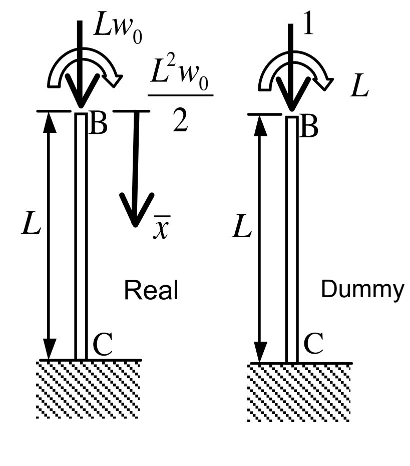
$$\Delta_C = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{1}{2}x\right)\left(-\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0 L}{4}x\right)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{w_0 L^4}{120EI}. \qquad \square$$

（２）先端 A に鉛直下向きにに単位荷重“↓（大きさ=1）”を負荷する問題をダミー問題とする．まず，先端 A から水平部材 AB に沿って左向きに座標軸 x を取り，本問題とダミー問題の曲げモーメントを求める．



AB 間の曲げモーメント：

$$M = -\frac{w_0 x^2}{2}, \qquad m = -x$$



次に，BC 間については，右図のように AB 間の効果を荷重とモーメントに置き換えて考え，座標は新たに点 B から下向きに $\bar{x}$ を取るものとする．

BC 間の曲げモーメント：

$$M = \frac{L^2 w_0}{2}, \qquad m = L \quad (\text{いずれも一定}).$$

以上を元に，補仮想仕事の原理によれば，先端 A のたわみ（下向きを正（ダミー単位荷重の向き）に取って

いる）は，以下のように求めることができる．

$$\Delta_{\mathrm{A}} = \int_0^L \frac{mM}{EI}\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^L \frac{1}{EI}(-x)\left(-\frac{w_0 x^2}{2}\right)\mathrm{d}x}_{\text{Part of AB}} + \underbrace{\int_0^L \frac{1}{EI}L\left(\frac{w_0 L^2}{2}\right)\mathrm{d}\bar{x}}_{\text{Part of BC}}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\left[\frac{x^4}{8}\right]_0^L + \left[\frac{L^3}{2}x\right]_0^L\right\} = \frac{5w_0L^4}{8EI}.$$

□