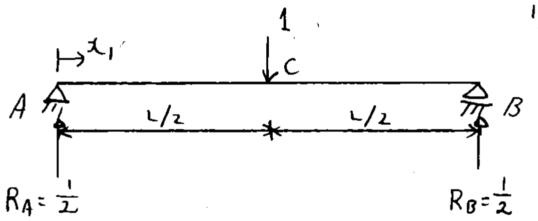
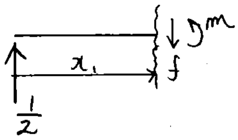
問題 1.2.1

中央点のたわみを求めたいので、中央点に単位荷重1を作用させる。

i) $0 \le x \le \frac{L}{2}$





$m = \frac{1}{2} x_1$

元の構造の $0 \le x \le \frac{L}{2}$ の区間の曲げモーメントは $M = \frac{1}{2} Q_1 x_1$ である。

構造の対称性を考慮して、

$$\Delta_C = \int_L \frac{mM}{EI} dx_1 = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}x_1\right)\left(\frac{Q_1}{2}x_1\right)}{EI} dx_1 = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{Q_1}{4} x_1^2 \, dx_1$$

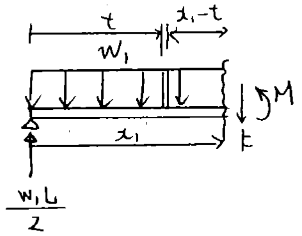
$$= \frac{2}{EI}\left[\frac{Q_1 x_1^3}{12}\right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{2Q_1 L^3}{EI\,96} = \frac{Q_1 L^3}{48EI}$$

問題 1.2.2

中央点のたわみ Δ:

中央点に単位荷重 1 を与えると $0 \le x_1 \le \frac{L}{2}$ における曲げモーメントは $m = \frac{1}{2} x_1$

元の構造の $0 \le x_1 \le L$ の曲げモーメントは下図を参照して



$$M = \frac{w_1 L}{2} x_1 - \int_0^{x_1} (x_1 - t) w_1 \, dt = \frac{w_1 L}{2} x_1 - w_1 \left[x_1 t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{x_1}$$

$$= \frac{w_1 L}{2} x_1 - \frac{w_1 x_1^2}{2}$$

中央点のたわみは、構造の対称性を考慮すると

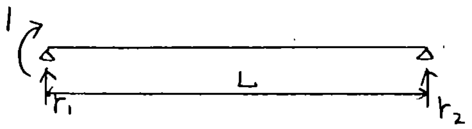
$$\Delta = \int_L \frac{m M}{EI} dx_1 = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\frac{1}{2} x_1 \left(\frac{w_1 L}{2} x_1 - \frac{w_1 x_1^2}{2} \right)}{EI} dx_1$$

$$= \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} (w_1 L x_1^2 - w_1 x_1^3) dx_1 = \frac{W_1}{2EI} \left[L \frac{x_1^3}{3} - \frac{x_1^4}{4} \right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{W_1}{2EI} \cdot \frac{5L^4}{192}$$

$$= \frac{5 w_1 L^4}{384 EI}$$

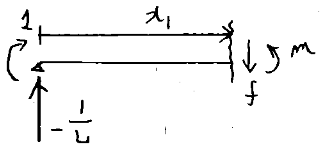
支点上のたわみ角 θ;

左の支点上に単位モーメントを与える。力のつり合いより反力を求める。



$$\left. \begin{array}{l} r_1 + r_2 = 0 \\ L r_1 + 1 = 0 \end{array} \right\} \qquad \therefore \; r_1 = -\frac{1}{L} \;, \quad r_2 = \frac{1}{L}$$

この構造の曲げモーメントは下図を参照して



$m = -\frac{1}{L} x_1 + 1$ である。

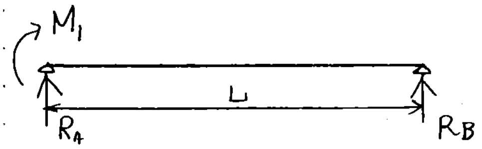
$$\theta = \int_L \frac{m M}{EI} dx_1 = \int_0^L \frac{\left(-\frac{1}{L} x_1 + 1 \right) \left(\frac{w_1 L}{2} x_1 - \frac{w_1 x_1^2}{2} \right)}{EI} dx_1$$

$$= \frac{W_1}{2EI} \int_0^L \left(-x_1^2 + \frac{x_1^3}{L} + L x_1 - x_1^2 \right) dx_1$$

$$= \frac{W_1}{2EI} \left[-\frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^4}{4L} + \frac{L x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{3} \right]_0^L = \frac{w_1 L^3}{24 EI}$$

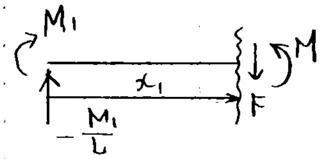
問題1.2.3

エネルギー保存則：　まず、反力を求める。つり合いより、



$$R_A + R_B = 0$$
$$L R_A + M_1 = 0$$
$$\therefore \quad R_A = -\frac{M_1}{L}, \quad R_B = \frac{M_1}{L}$$

曲げモーメントは　下図も参照して



$$M = -\frac{M_1}{L}x_1 + M_1$$

はりに蓄えられるひずみエネルギーは

$$U = \int_L \frac{M^2}{2EI}dx_1 = \frac{1}{2EI}\int_0^L \left(-\frac{M_1}{L}x_1 + M_1\right)^2 dx_1 = \frac{M_1^2}{2EI}\int_0^L\left(-\frac{x_1}{L}+1\right)^2 dx_1$$
$$= \frac{M_1 L}{6EI}$$

外力のなす仕事は

$$W_E = \frac{1}{2}M_1\theta$$

よって、　$U = W_E$ より　　$\theta = \frac{M_1 L}{3EI}$

ダミー荷重法：

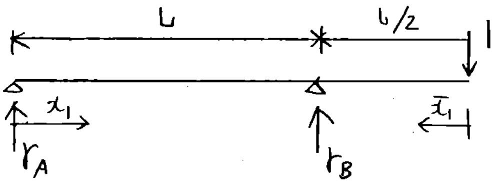
左支点上に単位モーメントを作用させたときの曲げモーメントは　$m = -\frac{1}{L}x_1 + 1$ である。

よって

$$\theta = \int_L \frac{mM}{EI} = \int_0^L \frac{\left(-\frac{1}{L}x_1+1\right)\left(-\frac{M_1}{L}x_1+M_1\right)}{EI}dx_1 = \frac{M_1}{EI}\int_0^L\left(-\frac{1}{L}x_1+1\right)^2 dx_1$$
$$= \frac{M_1}{EI}\left[\left(-\frac{1}{L}x_1+1\right)^3\frac{1}{3}(-L)\right]_0^L = \frac{M_1 L}{3EI}$$

問題 1.2.4

先端に単位荷重を与えたときの曲げモーメントを求める。



$$\left.\begin{aligned} r_A + r_B &= 1 \\ L r_B - \frac{3}{2}L &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad r_A = -\frac{1}{2}, \quad r_B = \frac{3}{2}$$

i) $0 \le x_1 \le L$ $\quad m = -\frac{1}{2}x_1$

ii) $0 \le \bar{x}_1 \le \frac{L}{2}$ $\quad m = -\bar{x}_1$ （計算が簡単になるよう$\bar{x}_1$を導入）

次に元の構造の曲げモーメントを求める。

$$\left.\begin{aligned} R_A + R_B &= \frac{3}{2}L w_1 \\ \int_0^{\frac{3}{2}L} x_1 w_1 \, dx_1 - L R_B &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad R_A = \frac{3}{8}w_1 L, \quad R_B = \frac{9}{8}w_1 L$$

i) $0 \le x_1 \le L$ $\quad M = \frac{3}{8}w_1 L x_1 - \frac{w_1}{2}x_1^2$

ii) $0 \le \bar{x}_1 \le L/2$ $\quad M = -\frac{w_1 \bar{x}_1^2}{2}$

先端の変位Δをダミー荷重法により計算する。

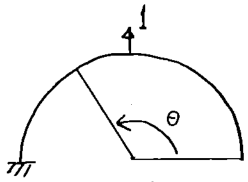
$$\Delta = \int_L \frac{mM}{EI}\,dx_1 = \int_0^L \frac{\left(-\frac{1}{2}x_1\right)\left(\frac{3}{8}w_1 L x_1 - \frac{w_1}{2}x_1^2\right)}{EI}\,dx_1 + \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(-\bar{x}_1\right)\left(-\frac{w_1 \bar{x}_1^2}{2}\right)}{EI}\,d\bar{x}_1$$

$$= \frac{w_1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{3}{16}L x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^3\right) dx_1 + \frac{w_1}{2EI}\int_0^{\frac{L}{2}} \bar{x}_1^3 \, d\bar{x}_1$$

$$= \frac{w_1 L^4}{128EI}$$

問題 1.2.5

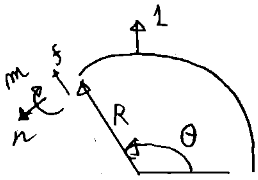
頂上部上向きに単位荷重を作用させる。



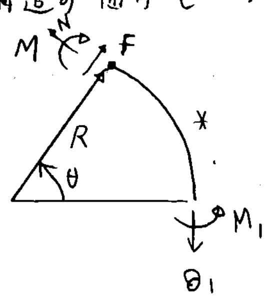
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ の区間では曲げモーメントは0である．すなわち $m=0$

$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ の区間について考えると

$$m = -R\cos\theta \times 1 = -R\cos\theta$$



元の構造の曲げモーメントを考える．　（* NやFの変形に対する影響は無視する）



$$M = M_1 - (R - R\cos\theta)\Theta_1 = M_1 - R(1-\cos\theta)\Theta_1$$

また，円弧上の微小長さは $ds = R\,d\theta$ と表すことができる

頂上部の変位をダミー荷重法で求めると

$$\Delta = \int_L \frac{mM}{EI}\,ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(-R\cos\theta)\{M_1 - R(1-\cos\theta)\Theta_1\}}{EI} R\,d\theta$$

$$= \frac{R}{EI}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-RM_1\cos\theta + R^2\Theta_1\cos\theta - R^2\Theta_1\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{R}{EI}\left\{(-RM_1 + R^2\Theta_1)\Big[\sin\theta\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - R^2\Theta_1\left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{1}{2}\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}$$

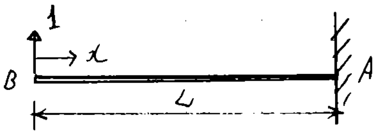
$$= \frac{R}{EI}\left\{(-RM_1 + R^2\Theta_1)(-1) - R^2\Theta_1\left(\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{R}{EI}\left\{RM_1 - R^2\Theta_1 - R^2\Theta_1\frac{\pi}{4}\right\} = -\frac{R^3\Theta_1}{EI}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{R^2M_1}{EI}$$

$$\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

問題 1.2.6

単位荷重をB点上向きに作用させるとき、曲げモーメントが発生するのは、BA間のみである。よって、BA間のみを考えればよい。



$0 \le x \le L \qquad m = x$

元の構造においては、点Bにモーメント荷重 $\theta_1 L$ が作用すると考える。

$0 \le x \le L \qquad M = \theta_1 L$ (一定)

＊この軸力は「曲げ変形」に寄与しないので
ここではその効果を無視する。

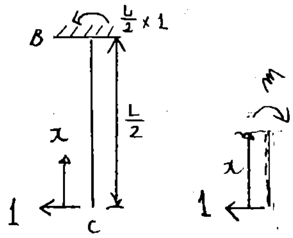
よって点Bの上向きの変位は

$$\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^L \frac{x(\theta_1 L)}{EI}\,dx = \frac{\theta_1 L}{EI}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{\theta_1 L^3}{2EI}$$

問題1.2.7.

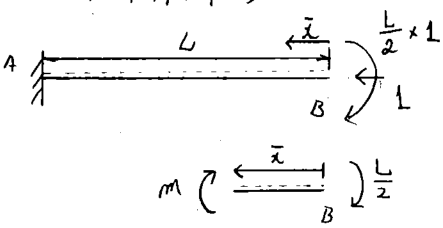
点Cの水平変位を求めるために、水平方向左向きに単位荷重1を作用させる.

まずCB間を考える. 曲げモーメントは内側が引張となる向きを正としよう.



$$0 \le x \le \frac{L}{2} \qquad m = -x$$

次に, BA間を考える



$$0 \le \bar{x} \le L \qquad m = -\frac{L}{2} \quad (一定)$$

元の構造の曲げモーメントは、上記の単位荷重に対する m を θ_1 倍したものである.

$$0 \le x \le \frac{L}{2} \qquad M = -\theta_1 x$$

$$0 \le \bar{x} \le L \qquad M = -\frac{\theta_1 L}{2}$$

よって水平変位は

$$\Delta_H = \int_{\ell} \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{(-x)(-\theta_1 x)}{EI}\,dx + \int_0^{L} \frac{\left(-\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{\theta_1 L}{2}\right)}{EI}\,d\bar{x}$$

$$= \frac{\theta_1}{EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{L}{2}} + \frac{\theta_1 L^2}{4EI}\left[\bar{x}\right]_0^{L} = \frac{\theta L^3}{EI}\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right) = \frac{7\theta_1 L^3}{24EI}$$

点Cに下向きに単位荷重を作用させるとCB間の m はゼロである. BA間は下記のとおり

$$0 \le \bar{x} \le L \qquad m = -\bar{x}$$

よって垂直変位は

$$\Delta_V = \int_{\ell} \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^{L} \frac{(-\bar{x})\left(-\frac{\theta_1 L}{2}\right)}{EI}\,d\bar{x} = \frac{\theta_1 L}{2EI}\left[\frac{\bar{x}^2}{2}\right]_0^{L} = \frac{\theta_1 L^3}{4EI}$$